Theorie der Abstrichsysteme zur Analyse von verschiedenen Primzahlproblemen

Gerd R. Sonnemann

Leibniz-Institute of Atmospheric Physics at the University Rostock in Kühlungsborn, Schloss-Str.6, D-18225 Ostseebad Kühlungsborn, Germany.

sonnemann@iap-kborn.de

Inhalt:

Zusammenfassung

In der Abhandlung werden Ansätze einer Theorie der so genannten Abstrichsysteme vorgestellt und auf verschiedene Probleme der Primzahlen angewendet, um ein tieferes Verständnis dieser Probleme zu erlangen. Es wird dabei nicht der aussichtslose Versuch unternommen, die Probleme selbst zu lösen, sondern diese aus einer etwas anderen Sicht zu beleuchten. Ausgangspunkt ist das Sieb des Eratosthenes von Kyrene, dem in diesem Artikel so genannten Abstrichsystem, welches in sehr anschaulicher Weise die Primzahlen ermittelt und das im Kapitel 2 diskutiert wird. Im Kapitel 3 wird das Abstrichsystem quantitativ gefasst. Dabei kann die Anzahl der relativen Primzahlen bis $\prod_{i=1}^{n} p_i$ berechnet werden. Ihre durchschnittliche Dichte auf dem Strahl der Natürlichen Zahlen beträgt $\prod_{i=1}^{n}(1-\frac{1}{p_i})=\prod_{i=1}^{n}(\frac{p_i-1}{p_i})$, dabei steht p_i für die i-te Primzahl. Diese Methode wird im Kapitel 4 auf andere Probleme wie dem goldbachschen oder dem Primzahlzwillingsproblem übertragen. Diese Siebe werden als doppelte Abstrichsysteme bezeichnet. Die Analyse der Möglichkeiten führt zusätzlich auf ein gleichrangiges Problem wie dem goldbachschen Problem, nämlich, dass jede gerade Zahl als Differenz zweier Primzahlen dargestellt werden

kann, wobei die kleinere Primzahl kleiner als die gerade Zahl sein muss. Im Kapitel 5 wird der doppelte Abstrich quantitativ gefasst. Als durchschnittliche Dichte der Realisierungen für die relativen Primzahlzwillinge wurde der Ausdruck $\frac{1}{2}\prod_{i=2}^{n}(1-\frac{2}{p_i}) = \frac{1}{2}\prod_{i=2}^{n}(\frac{p_i-2}{p_i})$ abgeleitet. Kapitel 6 behandelt das so genannte Primzahlgruppenproblem, welches darin besteht, dass es Gruppen aus m Primzahlen gibt, die zueinander gleiche Abstände haben wie im Fall des Primzahlzwillingsproblems mit dem Abstand 2 oder 4 Primzahlen innerhalb einer Dekade mit den Abständen 2, 4, 2. Die quantitative Fassung der Dichte der relativen Realisierungen im so genannten höheren Abstrichsystem führt zum Ausdruck $\prod_{i=1}^{n}(\frac{p_i-m_{ai}}{p_i})$ mit $1=m_{ai}=m$, wobei der Wert m_{ai} von den Differenzen in der Gruppe abhängt. Es handelt sich hierbei um „m-fach gesiebte“ Zahlen. Als notwendige und hinreichende Bedingung wird vermutet, dass, wenn es 2 Realisierungen gibt, es auch unbegrenzt viele solcher Gruppen gibt. Die Multiplikation der Dichte mit einer bestimmten Intervalllänge ergibt die durchschnittliche Anzahl der Realisierungen, die für das Anfangsintervall bis $(p_n)^2$ echte Realisierungen, z.B. echte Primzahlzwillinge, wären. Allerdings weicht die Anzahl der echten Realisierungen von der durchschnittlich erwarteten Anzahl ab. In der Abschätzung dieser Abweichungen besteht das fundamentale Problem der Beweisführung für alle Primzahlprobleme der genannten Art. In Kapitel 7 und 8 werden Differentialgleichungen für die Primzahldichte und jene von Gruppen von Primzahlen abgeleitet. Als Ergebnis folgt die Gleichung $\frac{dr(N)}{dN} + r(\sqrt{N})r(N)\frac{1}{2N} = 0$ für die Primzahldichte mit der speziellen Lösung $r(N) = \frac{1}{\ln(N)}$, die zum Gaußschen Integrallogarithmus für die Anzahl der Primzahlen bis N führt. Die Gleichung macht verständlich, dass Dichteschwankungen an der Stelle $\sqrt{N}$ zu Dichteschwankungen mit entgegen gesetztem Vorzeichen an der Stelle N führen. Die Differentialgleichungen für Gruppen sind gewöhnliche homogene Differentialgleichungen erster Ordnung wie jene für die Primzahlzwillingsdichte ds(N)/dN+ 2/(N ln(N))s(N)=0 mit der Lösung $s_2(N)=s_{20}/(\ln(N))^2$. Für eine Gruppe aus m Primzahlen steht statt der Zahl 2 die Zahl m in der Differentialgleichung. Die Lösung lautet dann $s_m(N)= s_{m0}/(\ln(N))^m$. Die Konstanten besitzen spezifische Werte, die sich aus Abschätzungen der Kapitel 9, 10 und 11 ergeben. Für die Anzahl der Primzahlen für ein Intervall der Länge $(p_n)^2$ ergibt sich numerisch der Wert $(p_n)^2$? $((p_i-1)/p_i)=F_n(p_n)^2/\ln((p_n)^2)$ mit konvergierender Konstante F_n. Die numerische Berechnung höherer Abstrichsysteme führt zu

? $((p_i-1)/p_i)$˜1.12289…/$\ln((p_n)^2)^1$

? $((p_i-2)/p_i)$˜ 0.832484…/$(\ln(p_n)^2)^2$

? $((p_i-3)/p_i)$˜ 0.674333…/$(\ln(p_n)^2)^3$

usw. berechnet für einen begrenzten Primzahlenbereich von 100000 Primzahlen. Die Konstante s_{20}=1.3203236316…, welche die Anzahl der Primzahlzwillinge bestimmt, ist gegeben durch den Ausdruck $\lim_{n\to\infty}(2\prod_{i=2}^{n}(\frac{(p_i-2)p_i}{(p_i-1)^2})$. Kapitel 12 betrachtet die Abstrichsysteme für arithmetische Folgen. Kapitel 13 untersucht die spezielle Reihe $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}$.

Ihr Wert verhält sich etwa wie $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}$ -ln(ln(p_n))˜0.261432…, allerdings beginnen die Werte um einen solchen mittleren Wert zu oszillieren. Es wird im Kapitel 14 die Menge der natürlichen Zahlen betrachtet, die nicht durch ein Quadrat teilbar sind. Kapitel 15 betrachtet die Anzahl der Primzahlen in einer speziellen nichtarithmetischen (quadratischen) Folge und leitet dabei ein doppeltes Abstrichsystem ab und Kapitel 16 führt noch einmal die Schwierigkeiten bei der konkreten Abschätzung der Anzahl der Realisierungen in den Abstrichsystemen vors Auge. Es wird darauf hingewiesen, dass sich Primzahlen im Grenzfall großer Zahlen wie statistisch zufällig verteilt verhalten, wobei das Grundproblem in der Abschätzung der Streuung besteht.

1. Einführung

Es gibt ein faszinierendes unbegrenztes Universum – nämlich jenes der Primzahlen. Hätte Gott die Naturkonstanten nur um ein Winziges anders festgesetzt, so gäbe es auch ein vollkommen anderes Universum, ohne Wesen, die über seine Schöpfung sinnieren könnten. Das Universum der Primzahlen aber wäre unverändert geblieben. Gott hätte nicht die Macht aus Primzahlen Produktzahlen zu machen, ihre Eigenschaften zu verändern. Sie stehen fest für alle Zeiten und in allen möglichen Universen mit all ihren Gesetzmäßigkeiten, die wir bisher erkannt oder auch nicht erkannt haben, die wir beweisen oder nicht beweisen konnten, nicht wissend, ob sie überhaupt jemals bewiesen werden können.
Was für den Menschen prinzipiell unbeweisbar ist, das muss es auch für Gott sein, so zum Beispiel die Frage, ob es unbegrenzt viele Primzahlzwillinge gibt. Aus der überschaubaren Statistik kann für ihre Menge eine einfache Gesetzmäßigkeit abgeleitet und die Schwankungen zum mittleren Verhalten statistisch abgeschätzt werden. Einen solchen Ausdruck gefunden zu haben, bedeutet aber nicht, auch einen Beweis entdeckt zu haben. Man wäre schon ein Stückchen weiter gekommen, wenn man plausibel machen könnte, warum die empirisch gefundenen Gesetzmäßigkeiten gelten sollten.
Nachfolgend sollen einige Überlegungen dargestellt werden, deren wesentliche Ergebnisse ich bereits vor mehr als einem Viertel Jahrhundert fand und 1975 auch einmal kurz zur Diskussion gestellt hatte. Die verwendeten analytischen Methoden und viele Ergebnisse sind durchaus seit vielen Jahrzehnten bekannt. Mit anderen Worten, ich möchte nicht den Eindruck erwecken, dass ich eine vollkommen neue Theorie repräsentiere. Ich wähle den Weg über das Internet, da es die schnellste Form der Informationsübermittlung bietet, und, wie ich gerne zugebe, die Darstellung weniger streng sein kann und damit Fehler im Formalen eine Veröffentlichung nicht verhindern können. Damit haben auch interessierte Laien Zugang zu den Ausführungen, was im Normalfall schwer ist, wenn man nicht den speziellen mathematischen Formalismus beherrscht. Es ist für einen Außenseiter auch sehr schwer einzuschätzen, welcher Gedanke wirklich neu ist und was im Grunde ein alter Hut ist, der vielleicht nur andersherum aufgesetzt wurde.
Um die Darstellung im doc-Format mit einem umständlichen Formel Editor etwas zu erleichtern, sollen Produkte teilweise als a*b, Quotienten als a/b dargestellt und, wenn unmissverständlich, auf Kennzeichnung in Summen S und Produkten ? verzichtet werden. Einfache bisweilen triviale Beispiele sollen helfen zu verstehen, worum es bei dem vorgestellten Gegenstand geht.

2. Das Sieb des Eratosthenes von Kyrene

Bekanntlich besteht das Sieb des Eratosthenes zur Ermittlung der Primzahlen darin, wenn von 0 ausgehend aus dem Strahl der natürlichen Zahlen jede zweite, danach jede dritte, darauf jede vierte Zahl usw. herausgestrichen wird. Die nicht herausgestrichenen Zahlen sind dann die Primzahlen. Dabei reicht es aus lediglich die Primzahlen selbst als so genannte **Abstrichzahlen** zu verwenden, denn die Abstriche der Produktzahlen sind bereits vollständig in den Abstrichen ihrer Teiler enthalten. Wir wollen nachfolgend vom **Abstrichsystem** sprechen. Zur besseren Veranschaulichung sollen die einzelnen Abstriche vom kleinsten

Abstrich (der 2) beginnend untereinander dargestellt werden, so dass sowohl Abszisse als auch die nach unten laufende Ordinate der Strahl der natürlichen Strahlen ist. Dies wird in **Abbildung 1** schematisch dargestellt.

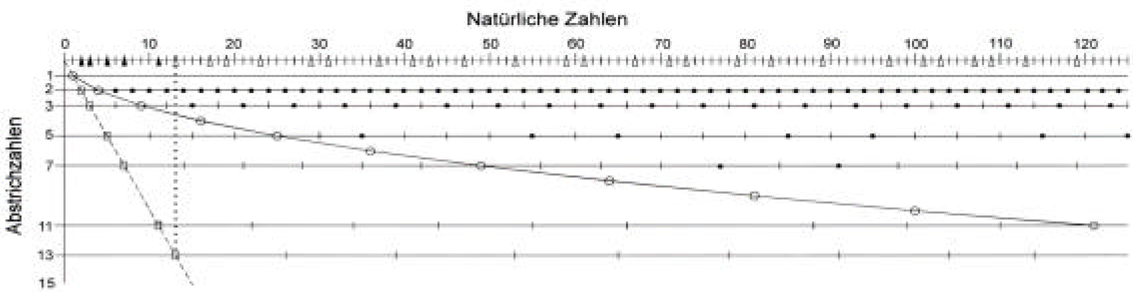

Abbildung 1 Einfaches Abstrichsystem

Bildlich vorgestellt: Der waagerecht verlaufende Strahl der natürlichen Zahlen hat zunächst nur offene Fenster an der Stelle jeder natürlichen Zahl. Darauf verdunkelt der Zweierabstrich jedes zweite Fenster. Der Dreierabstrich jedes dritte, wobei der Zweierabstrich bereits zuvor die Fenster der geradzahligen durch 3 teilbaren natürlichen Zahlen verdunkelt hatte usw. In Richtung der Ordinate aus betrachtet (oder durchleuchtet) entsprechen jene Fenster, durch die noch Licht hindurch fällt, den Primzahlen. Man stelle sich dies nun als mechanische Vorrichtung vor und lasse die Abstriche beweglich in Richtung der Abszisse sein. Verschiebe ich z.B. den Dreierabstrich im vollständigen System um 1 nach rechts oder links, dann werden einzelne Fenster auf dem Strahl der natürlichen Zahlen verdunkelt, die vorher hell waren, andere dagegen, die zuvor verdunkelt waren, sind nun hell. Der Sinn dieser Veranschaulichung des Siebes des Eratosthenes kommt erst zum Tragen, wenn die Natürlichen Zahlen doppelt oder mehrfach „gesiebt" werden, womit sich die nachfolgenden Kapitel im Wesentlichen befassen werden.
Vorweg sollen einige sprachliche Vereinbarungen getroffen werden: Wir wollen in Kürze definieren, was unter bestimmten Begriffen zu verstehen ist. Das **Abstrichsystem** ist die Gesamtheit aller Abstrichserien der Primzahlen. Es stellt quasi das Sieb des Eratosthenes von Kyrene dar. Eine **Abstrichserie** ist die Gesamtheit der durch genau eine Primzahl $\mathbf{p_i}$ mit herausgestrichenen natürlichen Zahlen. Das „mit" bedeutet dabei, dass eine natürliche Zahl auch durch andere herausgestrichen worden sein kann, wie z.B. 6 durch 2 und 3. Die entsprechende Primzahl heißt **Abstrichzahl**. **Herausstreichen** ist der Vorgang des Siebens und bedeutet, dass die herausgestrichene natürliche Zahl nicht Primzahl sein kann. Eine Ausnahme, die noch mehrfach eine Rolle spielen wird, ist der erste Abstrich durch eine Primzahl, die sich quasi selbst herausstreicht. Ein **effektiver Abstrich** ist ein **Abstrich**, der zuvor von keiner anderen Abstrichzahl herausgestrichen wurde. Als **Realisierungen** sollen

die nicht herausgestrichenen Gruppen von Zahlen in **höheren Abstrichsystemen** bezeichnet werden, die einer „Mehrfachsiebung“ unterlagen.

3. Quantitative Fassung des Siebs des Eratosthenes

Durch das Abstrichverfahren werden durch die 2 alle geraden Zahlen herausgestrichen, durch die 3 alle durch 3 teilbaren Zahlen usw. Die geradzahligen durch 3 teilbaren Zahlen wurden aber bereits durch die 2 herausgestrichen. Ist p_n die letzte berücksichtigte Abstrichzahl, so streicht diese Zahl effektiv nicht Produkte mit Faktoren p_{n-1} bis 2 heraus, die bereits vorher berücksichtigt wurden. Allgemein gefasst ergibt sich für den relativen Anteil der nicht herausgestrichenen natürlichen Zahlen die Reihe bis zur Abstrichzahl p_n:

$$1-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}+\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\frac{1}{p_i}\frac{1}{p_j}-\sum_{i=1}^{n-2}\sum_{j=i+1}^{n-1}\sum_{k=j+1}^{n}\frac{1}{p_i}\frac{1}{p_j}\frac{1}{p_k}-+\ldots-1^{n}\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i} \qquad (1).$$

Die Summenformel (1), wir wollen sie als **Abstrichreihe** bezeichnen, lässt sich einfacher als Produkt schreiben:

$$\prod_{i=1}^{n}(1-\frac{1}{p_i})=\prod_{i=1}^{n}(\frac{p_i-1}{p_i}) \qquad (2)$$

Wird das Zahlenintervall der Länge $\prod_{i=1}^{n}p_i$ betrachtet, so beträgt die Anzahl der zu p_1 bis p_n relativen Primzahlen genau

$$\prod_{i=1}^{n}(1-p_i)+(n-1) \qquad (3).$$

Der Summand (n-1) ergibt sich aus der Tatsache, dass der erste Abstrich die Primzahl selbst ist, aber die Zahl 1, die nicht herausgestrichen wird, nicht als Primzahl definiert ist.
Die Anzahl der Summanden in der Abstrichreihe bis n entspricht den Binomialkoeffizienten (n über k). Ihre Zahl steigt bis k=n/2+1 oder k=(n+1)/2, je nachdem ob n gerade oder ungerade ist, darauf fallen die Zahlenwerte der Koeffizienten in gleicher Weise wie sie anstiegen – für ungerade n ab k+1. Die Gesamtzahl der Summanden beträgt 2^n. Mit alternierendem Vorzeichen wäre die Summe 0, nämlich $(1-1)^n=0$.

Beispiel: Für die ersten 3 Primzahlen 2, 3, 5 beträgt das Intervall $\prod_{i=1}^{n}p_i$ 30, die Anzahl der relativen Primzahlen ist (2-1)(3-1)(5-1)+(3-1)=10, nämlich 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, welche in diesem Fall alle echte Primzahlen sind. Für die ersten 4 Primzahlen (2, 3, 5, 7) entspricht das Intervall 210, die Anzahl der relativen Primzahlen ist 51, darunter auch Produkte <210 wie 11*13=143, 11*17=187 und andere, wobei die Primfaktoren größer als 7 sind.

Der Beweis obiger Formel kann durch vollständige Induktion erbracht werden. Es soll die Schreibweise der Summen und Produkte etwas vereinfacht werden. Die Aussage ist richtig für die ersten drei Primzahlen 2, 3, 5, dass sie von der Gesamtmenge der natürlichen Zahlen bis $\prod_{i=1}^{3}p_i$ =30 den relativen Anteil (die oberen Indices stehen der Einfachheit halber für die Summenkennzeichnung entsprechend Gleichung (1)) (1-1/2-1/3-1/5+1/2*1/3+1/2*1/5+1/3*1/5-1/2*1/3*1/5)=(1-^{3}S1/p_i+^{2}S^{3}S1/p_i*1/p_j+1/p_1*1/p_2*1/p_3)=^{3}? (1-1/p_i) herausstreichen. Angenommen die Formel gälte bis n, dann folgt für die Erweiterung auf die (n+1). Primzahl: ^{n}? (1-1/p_i)*(1-1/p_{n+1})
=$^{n+1}$? (1-1/p_i)

$$=(1-{}^{n}S1/p_i+{}^{n-1}S^{n}S(1/p_i*1/p_j)-{}^{n-2}S^{n-1}S^{n}S(1/p_i*1/p_{j*}1/p_k)+-\dots(-1)^{n}?\,(1/p_i)-(1-{}^{n}S1/p_i+{}^{n-1}S^{n}S(1/p_i*1/p_j)-{}^{n-2}S^{n-1}S^{n}S(1/p_i*1/p_j*1/p_k\,)+-\dots(-1)^{n}{}^{n}?\,(1/p_i))*1/p_{n+1})$$
$$=1-{}^{n+1}S1/p_i+{}^{n}S^{n+1}S(1/p_i*1/p_j)-{}^{n-1}S^{n}S^{n+1}S(1/p_i*1/p_{j*}1/p_k)+-\dots(-1)^{n}*{}^{n-2}S^{n-1}S^{n}S\dots{}^{2}S^{3}S(1/p_i*1/p_j*1/p_k\dots*1/p_{n-1}*1/p_n)+(-1)^{n+1}{}^{n+1}?\,(1/p_i).$$

Beispiel: Die Erweiterung von 5 auf 7 ergäbe $(1-1/2-1/3-1/5+1/2*1/3+1/2*1/5+1/3*1/5-1/2*1/3*1/5)*(1-1/7)=(1-1/2-1/3-1/5+1/2*1/3+1/2*1/5+1/3*1/5-1/2*1/3*1/5)-(1/7-1/2*1/7-1/3*1/7-1/5*1/7+1/2*1/3*1/7+1/2*1/5*1/7+1/3*1/5*1/7-1/2*1/3*1/5*1/7)=(1+(-1)^{1}S^{4}1/p_i+(-1)^{2}*{}^{3}S^{4}S(1/p_i*1/p_j)+(-1)^{3}\,{}^{2}S^{3}S^{4}S(1/p_i*1/p_j*1/p_k)+(-1)^{4}*{}^{4}?\,(1/p_i\,))$

4. Das doppelte Abstrichsystem

Es gibt genau 3 Primzahlprobleme, die eng miteinander verwand sind und aus einem doppelten Abstrichsystem folgen. Diese sind:
1. das **verallgemeinerte Primzahlzwillingsproblem**, das allgemein formuliert lautet, ob es unbegrenzt viele Paare von Primzahlen gibt, deren Abstand 2k (k=1(1)N)beträgt, für k=1 also dem Primzahlzwillingsproblem entspricht.
2. Das **goldbachsche Problem**, welches darin besteht, ob jede gerade Zahl 2N>2 als Summe zweier Primzahlen dargestellt werden kann.
3. Das **eingeschränkte Primzahldifferenzproblem**, welches die Frage stellt, ob jede gerade Zahl 2N>2 als Differenz zweier Primzahlen dargestellt werden kann, wobei eine Primzahl kleiner als diese Zahl 2N sein muss, wie als Beispiel für die ersten geraden Zahlen in 4=7-3; 6=11-5; 8=11-3 oder 13-5; usw. gilt.
Man könnte meinen, dass das dritte Problem einfacher als das so genannte schwache goldbachsche Problem ist, welches darin besteht, ob jede ungerade Zahl>5 sich als Summe dreier Primzahlen darstellen lässt, da hier nicht vorausgesetzt wird, dass die gerade Zahl 2N Summe zweier Primzahlen ist. Beim schwachen goldbachschen Problem kann jedoch die ungerade Zahl zwar von einer beschränkten aber größeren Anzahl von geraden Zahlen aus durch Addition einer Primzahl gebildet werden (wäre das goldbachsche Problem bewiesen, dann gölte auch das schwache goldbachsche Problem, da durch Addition von 3 oder 5 oder 7 usw. jede ungerade Zahl gebildet werden kann). Andererseits könnte es durchaus auch bestimmte gerade Zahlen geben, die nicht als Summe zweier Primzahlen darstellbar sind, ohne dass damit das schwache goldbachsche Problem fiele. Das goldbachsche und Primzahldifferenzproblem sind gleichrangige Probleme, das verallgemeinerte Primzahlzwillingsproblem scheint dabei zunächst das einfachere Problem zu sein, da beliebig große Intervalle zulässt, worin es keine Zwillinge zu geben braucht.

Es sei das **Primzahlsymmetrieproblem** erwähnt, welches darin besteht, dass es zu jeder geraden Zahl 2N>2 wenigstens ein Primzahlpaar gibt. welches symmetrisch zu 2N liegt wie für 4 das Paar (3,5); für 6 das Paar (5,7); für 8 die Paare (3,13) und (5,11). Dieses Problem ist allerdings identisch mit dem goldbachschen Problem für doppeltgerade Zahlen 4N.

Bei den vorgestellten Problemen handelt es sich quasi um „doppelt gesiebte Probleme". Im ersten Fall wird über das erste Abstrichsystem ein zweites laufen gelassen, wobei die Abstrichanfänge für jede Abstrichzahl der zweiten Folge um 2k verschoben sind. Damit sind im Bild der offenen Fenster nur jene Zwillinge, wenn durch beide Abstrichserien das Licht hindurch scheint.

Für das goldbachsche Problem gilt, dass (wie für alle anderen Problemen auch) das erste Abstrichsystem normal läuft, das zweite aber, wenn 2N die betrachtete gerade Zahl ist, dieses an der Stelle 2N beginnt und in Richtung zu kleineren Werte hin dem ersten entgegen läuft.

Damit entsprechen die Lücken genau der Bedingung $p_1+p_2=2N$. Es wird jedes Paar doppelt ermittelt, da das System mit Bezug zur Stelle N spiegelsymmetrisch ist. Für das zweite Paar ist lediglich die Reihenfolge der Primzahlen vertauscht: $p_2+p_1=2N$. Wird an der Stelle N das hinlaufende Abstrichsystem reflektiert, in der Weise, dass die Abstrichschrittweiten beachtet werden, dann reduziert sich die Länge des zur Analyse betrachteten Abstrichsystems um die Hälfte.
Im dritten Fall wird das Abstrichsystem an der Stelle 2N abgeschnitten und der rechtsseitige Abstrich wird am Anfang von 0 ausgehend fortlaufen gelassen, so dass die Abstriche um die Abschneidestelle folgende Bedingung erfüllen: Für den Abstrich p_i gilt $s_v+s_h= p_i$ mit s_v und s_h Schrittweite vor und hinter dem Abschneiden. Somit ist $p_2-p_1=2N$, wenn $p_1<2N$ der Lücke im hinlaufenden Abstrichsystem und $p_2>2N$ der Lücke im abgeschnittenen System entspricht.
Beispiel: 2N=30. Abstrichzahlen sind 2, 3, 5 und 7 – alle Primzahlen, deren Quadrat<60 ist. Realisierungen sind 37-7; 41-11; 43-13; 47-17; 53-23 und 59-29. 49-19 ist keine Realisierung, da 49=7*7 ist. Der 7-er Abstrich hat an der Stelle 30 linsseitig den Rest 2. Somit fängt die zweite Abstrichserie bei 5 an, denn 2+5=7. Es ist 5+2*7=19, somit streicht der zweite 7-er Abstrich an der Stelle 19 diese Stelle heraus. Da 30 durch 3 teilbar ist, beginnt auch die zweite 3-er Abstrichserie bei 0.

Für das Symmetrieproblem wird ein Abstrichsystem genau an der Grenze 2N reflektiert, so dass wieder die obige Schrittweitenbedingung gilt, was aber nichts anderes als das goldbachsche Problem für Zahlen der Form 4N ist. Die **Abbildung 2** zeigt schematisch die doppelten Abstrichsysteme für die drei prinzipiellen Probleme des doppelten Abstrichs.
Beispiel: 2N=2*5=10. Realisierungen sind (3,17) und (7,13). Ihre Summe ist jeweils 20=4*5.

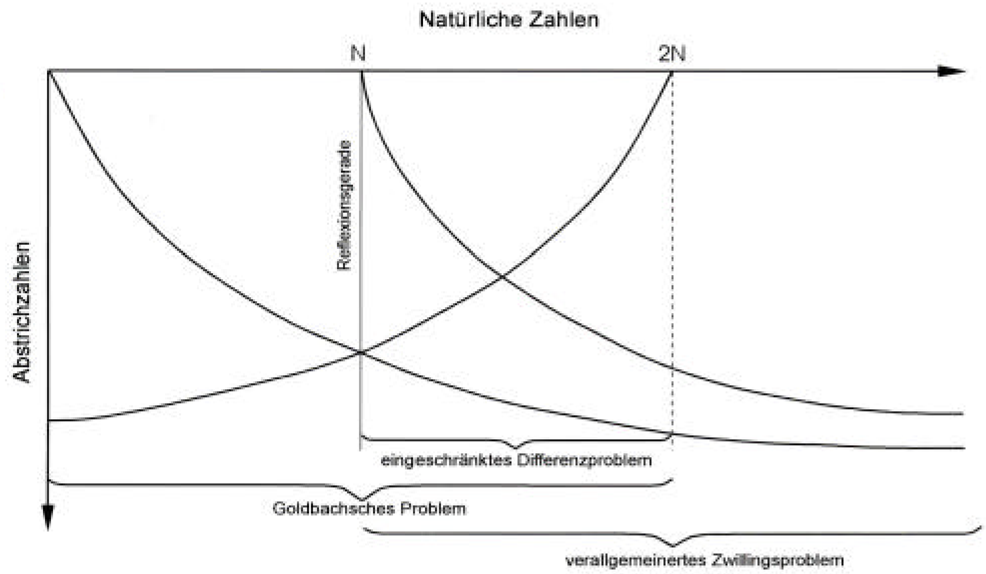

Abbildung 2 Schematische Darstellung der Probleme des doppelten Abstrichs

Alle vorgestellten Probleme sind Spezialfälle eines sehr allgemeinen Problems des doppelten Abstrichs. Wie oben bildhaft erläutert, steht allgemein die Frage:
Besitzt ein beliebiger doppelter Abstrich, dessen Abstrichzahlen bis zur Primzahl p_n gehen und deren Abstrichanfänge beliebig beginnen, für ein Abstrichintervall der Länge $(p_n)^2/2$ immer nicht herausgestrichene Zahlen?

Hierbei fällt die Zahl 2 als doppelte Abstrichserie in trivialer Weise aus. Abstriche beliebig beginnen meint, dass der erste Abstrich für p_i an der Stelle ${}^{j}k_i= p_i$ beginnt, mit j=1 oder 2 entsprechend der ersten oder zweiten Serie des doppelten Abstrichs. Abstrichzahlen für eine Intervalllänge $(p_n)^2$ können nur Primzahlen $p_i= p_n$ sein.
Könnte die obige Frage beantwortet werden, dann wären alle drei Probleme auf einen Schlag gelöst. Man kann zwar zeigen, dass sich die durchschnittliche Anzahl der Realisierungen proportional zu $\sim(p_n)^2/(\ln(p_n)^2)^2$ ist, damit wird im Einzelfall aber nichts bewiesen solange der schlechteste Fall, der so bezeichnete „worst case", nicht abgeschätzt, d.h. die maximale Streuung zu einem Erwartungswert nicht ermittelt werden kann.

5. Quantitative Fassung des doppelten Abstrichs

Es wird wieder ein Zahlenintervall der Länge $\prod_{i=1}^{n} p_i$ betrachtet und der relative Anteil der herausgestrichenen Zahlen ermittelt. Die quantitative Fassung des doppelten Abstrichsystems bis zur Abstrichzahl p_n berücksichtigt, dass jedes Abstrichsystem für sich allein gesehen (siehe vorhergehenden Abschnitt) die Hälfte aller Zahlen durch 2, ein Drittel aller Zahlen durch 3, usw. herausgestrichen werden. Dabei wurden aber die Zahlen 3*5, 3*7,… , p_i*p_j,... doppelt herausgestrichen. Dieses musste in Abzug gebracht werden. Es wurden damit aber die Dreifachprodukte zu viel in Abzug gebracht, so dass deren Anteil wieder hinzugefügt werden musste. Alternierend wird so für geradzahlige Produkte zuviel und für ungeradzahlige zuwenig berücksichtigt. Für jede Primzahl ab 3 gibt es jeweils zwei Abstrichserien. (Diese können für spezielle Fragestellungen auch zusammenfallen.) Eine Abstrichserie des ersten Abstrichsystems kann sowohl mit Abstrichen des ersten wie auch des zweiten Abstrichsystems zusammenfallen. Das Gleiche gilt für das zweite Abstrichsystem. Dieses in gleicher Weise für die Mehrfachzusammenfälle berücksichtigt, ergibt für den relativen Anteil der nicht herausgestrichenen Zahlen die nachfolgende Reihe bzw. in der Produktdarstellung das nachfolgende Produkt:

$$\frac{1}{2}-\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{p_i}+2\sum_{i=2}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\frac{1}{p_i}\frac{1}{p_j}-4\sum_{i=2}^{n-2}\sum_{j=i+1}^{n-1}\sum_{k=j+1}^{n}\frac{1}{p_i}\frac{1}{p_j}\frac{1}{p_k}+-...(-2)^{n-1}\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i} \quad (4).$$

In der Produktdarstellung folgt $\frac{1}{2}\prod_{i=2}^{n}(1-\frac{2}{p_i})=\frac{1}{2}\prod_{i=2}^{n}(\frac{p_i-2}{p_i})$ (5).

Die Indizes laufen dabei für die Produkte von 2 bis n, für die Summen i=2, j=i+1, k=j+1 usw. und die oberen Grenzen für die Einfachsumme bis n; für die Doppelsumme bis (n-1) und n; für die Dreifachsumme bis (n-2), (n-1), n; ... etc. Diese Reihe oder das Produkt entspricht der durchschnittlichen Dichte der nicht herausgestrichen Zahlen. Ihre Gesamtzahl im betrachten Intervall ist genau
1/2? (p_i-2/p_i)? (p_i)+Z(p_n)=? (p_i-2)+Z(p_n) (6) Stück. Z(p_n) gibt die Anzahl der Primzahlzwilling bis einschließlich p_n an, die im Abstrichsystem als herausgestrichen gelten.
Beim goldbachschen oder Primzahldifferenzproblem können Abstrichserien in sich selbst zurücklaufen. Dies betrifft die Teiler von N $=\sqrt{N}$, wenn 2N die gerade Zahl ist, die als Summe oder Differenz zweier Primzahlen darzustellen ist. Für das verallgemeinerte Primzahlzwillingsproblem gilt dies für die Teiler des Abstandes d des verallgemeinerten Zwillingspaares. Wäre der Abstand d z.B. d=6=2*3, dann stimmte der zweite Dreierabstrich mit dem ersten überein. In den Produkten stünde statt p_i-2 dann p_i-1 oder vor den Produkten

der Faktor $(p_i-1)/(p_i-2)$, wenn das Produkt unverändert bliebe. Für $p_i=3$ ergibt sich immerhin ein Wert von 2, d.h. es gibt für große Zahlen etwa doppelt so viel Primzahlzwillinge der Differenz 6 als mit der Differenz 2. Für mehrere zu berücksichtigende Teiler ergibt sich als Vorfaktor ein entsprechendes Produkt ? $(p_{ai}-1)/(p_{ai}-2)$. Je mehr (kleine) Teiler N bzw. d besitzt, umso mehr Realisierungen werden erwartet.
Völlig analog zum einfachen Abstrichsystem verläuft der Beweis für das doppelte Abstrichsystem, nur, dass statt $(-1)^k$ der Vorfaktor $(-2)^{k-1}$ steht und das Produkt erst mit der zweiten Primzahl 3 beginnt.
Beispiel: Für n=3 folgte nach (6) bis 2*3*5=30 als relative Primzahlzwillinge, die in diesem Fall echte Zwillinge sind, 1*3+2=5 Stück, nämlich (3,5); (5,7); (11,13); (17,19); (29,31).
Für n=4 folgte bis 2*3*5*7=210 1*3*5+2=17 relative Primzahlzwillinge, nämlich (3,5); (5,7); (11,13); (17,19); (29,31); (41,43); (59,61); (71,73); (89,91); (101,103); (107,109); (137,139); (149,151); (167,169); (179,181); (191,193); (197,199). Hierbei ist (167,169=13*13) ein Paar relativer Primzahlzwillinge, da 169 nur durch Zahlen >7 teilbar ist. Bis $(p_n)^2$ sind die relativen Primzahlzwillinge immer echte Primzahlzwillinge, d.h. im letzten Beispiel bis 7*7=49.

6. Das Primzahlgruppenproblem

Das Primzahlzwillingsproblem ist lediglich ein spezielles Problem von Primzahlen mit konstantem Abstand. Für ein doppeltes Abstrichsystem könnte der Abstand beliebig 2k (k=1, 2, 3,…) sein. Für k=2 z.B. (7,11); (13,17); (19,23) usw. oder für k=3 mit Abstand zweier Primzahlen von 6 sind Realisierungen (5,11); (7,13); (11,17); (13,19); (17,23); (23,29); etc. Da der Abstand 6=2*3 beträgt, gibt es keinen doppelt zu berücksichtigen Dreierabstrich. Damit wird (5) zu $\frac{1}{2}\frac{2}{3}\prod_{i=3}^{n}(1-\frac{2}{p_i})=\frac{1}{2}\frac{2}{3}\prod_{i=3}^{n}(\frac{p_i-2}{p_i})$ (7), was entsprechend zu (6) zu einer höheren Anzahl von Realisierungen führt. Für n=3 folgte bis 30 somit 2*(5-2)=6 Realisierungen wie oben angegeben wurde.
Nachfolgend soll es um Gruppen von mehr als 2 Primzahlen mit konstantem Abstand gehen. So können in einer Dekade 4 Primzahlen auftreten. Realisierungen wären (11, 13, 17, 19); (101, 103, 107, 109); (191, 193, 197, 199) oder (821, 823, 827, 829).
Es wird als notwendige und hinreichende Bedingung vermutet, dass, wenn es 2 Realisierungen für eine Gruppe von Primzahlen gibt, es auch unbegrenzt viele Realisierungen gibt.
Gruppen von m Primzahlen können durch ein m-faches Abstrichsystem ermittelt werden. Die analytische Fassung verläuft völlig analog. Als Ergebnis folgt für den Fall, dass die Abstrichzahlen p_j kleiner als p_l jeweils keinen freien Rest bezüglich der Gesamtheit ihrer Serien lassen: $\prod_{j=1}^{l-1}\frac{1}{p_j}\prod_{i=1l}^{n}(1-\frac{m}{p_i})=\prod_{j=1}^{l-1}\frac{1}{p_j}\prod_{i=l}^{n}(\frac{p_i-m}{p_i})$ mit $p_l>m>p_{l-1}$ oder allgemein $\prod_{i=1}^{n}(\frac{p_i-m_{ai}}{p_i})$ mit $1=m_{ai}=m$ (8). Der Wert von m_{ai} hängt von den m-1 Differenzen d_j der Gruppe ab, wie viel Abstriche in sich selbst laufen.
Beispiele: Diese Aussage muss am Beispiel erklärt werden. Eine Gruppe wie 11, 13, 17, 23 hat die Differenzen 2, 4 und 6. Damit läuft ein 5-er Abstrich von den 4 Abstrichen in sich selbst und m_3 ist damit 3 und nicht 4 wie im Fall von 4 Primzahlen innerhalb einer Dekade. Für die Vierergruppe innerhalb einer Dekade gilt bezüglich des Dreierabstrichs 2mod(3)=11, 1mod(3)=13, 2mod(3)=17 und 1mod(3)=19. (xmod(y)=z bedeutet, dass bei Division von z durch y der ganzzahlige Rest x bleibt.) Bezüglich der Fünferabstriche folgte 1mod(5)=11, 3mod(5)=13, 2mod(5)=17, 4mod(5)=19. Für den Siebenerabstrich folgte 4mod(7)=11,

6mod(7)=13, 3mod(7)=17 und 5mod(7)=19. Es bleiben die 7-4=3 freien Reste 0, 1, 2. Nach der Formel (8) für n=4 bis 210=2*3*5*7 ergibt sich als Anzahl der Realisierungen: 1*1*1*(7-4)=3, nämlich (11, 13, 17, 19); (101, 103, 107, 109); (191, 193, 197, 199). Bis 2310 mit n=5 gibt es demnach 3*7+1=22 (+1, da die 11 die erste Gruppe herausstreichen würde) Realisierungen, wobei auch jene mitzählen, deren Produktzahlen ausschließlich aus Primfaktoren >11 bestehen. Die Formel (8) muss für bestimmte Gruppen modifiziert werden. Ohne die Gruppe im Detail zu diskutieren, hat die Vierergruppe (11, 13, 17, 23) mit den Abständen 2, 4, 6, die sich z.B. in (101, 103, 107, 113) wiederholt, bezüglich des Restes zu 5 ist 3mod(5)=23 ebenso wie für die 13. Dafür fehlt der Rest 4, womit als Faktor anstatt (1/5) nun (2/5) auftritt und damit sich die Anzahl der Realisierungen verdoppelt. Für n=4 sind dies 2*3+1=7 mit (11, 13, 17, 23); (41, 43, 47, 53); (101, 103, 107, 113), aber auch (5, 7, 11, 19); (17, 19, 23, 29), (107, 109, 113, 119=7*13); (167, 169=13*13, 173, 179). (5, 7, 11, 19) entspricht der zusätzlichen Gruppe, die durch 5 herausgestrichen wäre.

Die oben angeführten Vierergruppen sind nur mögliche Varianten eines Viererabstrichs. Spiegelt man den Zwillingsabstrich im hexadischen System (alle Zwillinge haben die Form $6k \pm 1$) an der Stelle N, dann ergibt sich das Problem, ob ***alle durch 12 teilbaren Zahlen >12 als Summe zweier Primzahlzwillinge dargestellt werden können***. Beginnend mit 24 (5+7; 5+7), 36 (5+7; 11+13), 48 [(5+7; 17+19),(11+13; 11+13)] usw. Die Annahme setzt natürlich die Unbegrenztheit der Anzahl der Zwillinge voraus, aber geht weit über diese Annahme hinaus.

7. Die Differentialgleichung der Primzahldichte

Die Abnahme -d(?(N)) der Primzahldichte ?(N) an der Stelle $N=(p_n)^2$ wird bestimmt durch die Zunahme A der Primzahlen im Intervall um die Stelle $\sqrt{N}=p_n$ herum, so dass Schwankungen zu einem mittleren Wert klein werden.

-d(?(N))= d(A($\sqrt{N}$))/d($\sqrt{N}$)*d($\sqrt{N}$)=?($\sqrt{N}$)d($\sqrt{N}$) (9)

Die neu hinzugekommenen Primzahlen um die Stelle $\sqrt{N}$ streichen aus den zunächst relativen Primzahlen um die Stelle N eine bestimmte Menge heraus, die proportional zur dortigen Primzahldichte ist. -d(?(N))~?(N) ?($\sqrt{N}$)d($\sqrt{N}$)/$\sqrt{N}$. Hierbei wurde mit dem Faktor $1/\sqrt{N}$ berücksichtigt, dass die Abstrichweite $\sqrt{N}=p_n$ beträgt. Das Differential d($\sqrt{N}$) an der Stelle $\sqrt{N}$ ist d($\sqrt{N}$)=($\sqrt{N}$+d($\sqrt{N}$))-(d($\sqrt{N}$))-($\sqrt{N}$) (10). Die effektiven Abstriche fallen aber in das Intervall dN=(($\sqrt{N}$+d($\sqrt{N}$))^2-($\sqrt{N}$)^2=2($\sqrt{N}$)+d($\sqrt{N}$)^2. Vernachlässigung des quadratischen Terms ergibt d($\sqrt{N}$)=$\frac{dN}{2\sqrt{N}}$ (11). Mit (11) folgt für die Differentialgleichung der Primzahldichte um die Stelle N:

$$\frac{dr(N)}{dN}+r(\sqrt{N})\,r(N)\frac{1}{2N}=0 \qquad (12).$$

Der Proportionalitätsfaktor wurde gleich 1 gesetzt, d.h. er hängt nicht von N ab, was für große Zahlen N vorausgesetzt wird. Die Gleichung (12) hat die spezielle Lösung $r(N)=\frac{1}{\ln(N)}$ (13). Damit ergibt sich für die Gesamtanzahl der Primzahlen genau der Gaußsche Ausdruck für die Menge der Primzahlen $L_i(N)=\int_{N_0}^{N}\frac{dt}{\ln(t)}$ (14). (Die untere Grenze des Integrals ist N_0,>1, d.h. die Integration beginnt sinnvoller Weise mit einem Wert >1 z.B. mit 2.) Die Differentialgleichung (12) unterscheidet sich von den gewöhnlichen Differentialgleichungen dadurch, dass in der Variablen ? einmal das Argument $\sqrt{N}$ auftritt anstatt N. Die Gleichung besitzt nicht nur die spezielle Lösung (13), sondern kann von einer beliebig vorgegebenen Lösung im Intervall $\sqrt{N}$ bis N numerisch weiter integriert werden. Insbesondere kann die Lösung (13) durch Fluktuationen überlagert sein. Ein Zuviel in der Umgebung von $\sqrt{N}$ zieht ein Zuwenig in der verbreiterten Umgebung von N nach sich.

8. Die Differentialgleichungen für höhere Abstrichsysteme

Die Differentialgleichung für den doppelten Abstrich folgt aus ähnlichen Überlegungen wie für den einfachen Abstrich. Mit s(N) sei die Dichte z.B. der Primzahlzwillinge oder der Realisierungen der anderen Probleme bezeichnet und ihre Abnahme an der Stelle N wird –d(s(N)) geschrieben. Die neuen Primzahlen an der Stelle $\sqrt{N}$ sind die neuen Abstrichzahlen an der Stelle N. Das Differential dN=2$\sqrt{N}$ d($\sqrt{N}$) entspricht den alten Überlegungen. Die Primzahldichte an der Stelle $\sqrt{N}$ ist mit –d(s(N))~s(N) gegeben durch ?($\sqrt{N}$)=1/ln($\sqrt{N}$)=2/ln(N). Es gibt zwei Abstrichserien, die eine für den kleineren, die andere für den größeren Zwilling, was einer Verdopplung des obigen Ausdrucks entspricht: 2?($\sqrt{N}$)=4/ln(N). Die Abstrichschrittweite beträgt wieder $\sqrt{N}$. Damit folgt die gewöhnliche Differentialgleichung

d(s(N))/dN+ ?($\sqrt{N}$)/Ns(N)=0 (15)

oder mit der bekannten mittleren Primzahldichte

d(s(N))/dN+ 2/(N ln(N))s(N)=0 (16).

Die Lösung dieser homogenen Differentialgleichung erster Ordnung für das doppelte Abstrichsystem ist simpel $s_2(N)=s_{20}/(\ln(N))^2$ (17).
Der konstante Parameter s_{20} wird durch die Anfangsbedingungen bestimmt. Die Gesamtzahl der Primzahlzwillinge (twins) beträgt hiernach

$?_T(N)= s_{20}\int_{N_0}^{N} 1/(\ln(t))^2dt$ (18). Aus der Menge der Primzahlzwillinge konnte die Konstante für große N abgeschätzt werden und beträgt s_{20}=1.3203236316…. Für die untere Grenze gelten ebenfalls analoge Überlegungen wie bei dem einfachen Abstrichsystem.

Die Ableitung der Differentialgleichung für das goldbachsche oder Differenz Problem (G/D) verläuft analog. Allerdings hängt die Konstante ${}^{G/D}s_{20}(N)$ von N und seinen Teilern ab. Die Primfaktoren von N bedingen, dass doppelte Abstriche in sich selbst zurück laufen, womit die Anzahl der Realisierungen steigt. Das gleiche gilt für das verallgemeinerte Primzahlzwillingsproblem, bei dem die Teiler der Differenz zwischen den beiden Primzahlpaaren entscheidend sind. Hiernach sind echte Zwillinge (Abstand 2) und solche, deren Abstand 4 beträgt gleich häufig, da keine weiteren Abstrichserien in sich selbst laufen außer trivialer Weise der 2-er Abstrich. Aber solche Paare, deren Abstand 6 ist, wie im Abschnitt 5 erwähnt, sind um den Faktor 2 häufiger. Die Differentialgleichung beschreibt die Anzahl der Realisierungen von $p_i+p_j=2N$ bzw. $p_i-p_j=N$ mit $p_j=N$.

Die Ableitungen der Differentialgleichung von Gruppen folgen dem gleichen Schema. Die Abnahme der Gruppendichte einer Gruppe von m Zahlen an der Stelle N ist $-ds_m(N)\sim s_m(N)$.

Das Differential $dN=2\sqrt{N}\,d(\sqrt{N})$ folgt wieder aus den zuvor angestellten Überlegungen. Die Primzahldichte an der Stelle $\sqrt{N}$ ist wieder gegeben durch $?(\sqrt{N})=1/\ln(\sqrt{N})=2/\ln(N)$. Es gibt nun m Abstrichserien (im Beispiel von Abschnitt 6. genau 4), welche die Gruppendichte reduzieren, was einer Multiplikation des obigen Ausdrucks mit m entspricht: $m?(\sqrt{N})=2m/\ln(N)$. Die Differentialgleichung ist damit unter Berücksichtigung der vorhergehenden Betrachtungen

$$ds_m(N)/dN+ m/(N \ln(N))s_m(N)=0 \qquad (19).$$

Die Lösung lautet: $s_m(N)= s_{m0}/(\ln(N))^m$ (20) mit der speziellen Konstanten s_{m0}, deren Wert sich aus Überlegungen der kommenden Abschnitte abschätzen lässt.

9. Numerische Abschätzungen zur Abstrichreihe

Wie bereits diskutiert, sind in einem Zahlenintervall der Länge $(p_n)^2$ alle nicht herausgestrichenen Zahlen Primzahlen zusätzlich der Primzahlen bis p_n. Bei einer Gleichverteilung der relativen Primzahlen ergäben sich $(p_n)^2? ((p_i-1)/p_i)+(n-1)$ (21) Stück. Dieser Ausdruck repräsentiert also einen Mittelwert, für ein beliebiges Intervall der Länge $(p_n)^2$. Obwohl anfänglich zu wenige Primzahlen berechnet werden, überschätzt dieser Ausdruck später deren Anzahl um einen Prozentsatz, der auf einen festen Wert konvergiert.
Beispiel: Für $p_n=31$ findet man bis $(p_n)^2=961$ genau 162 Primzahlen, während der obige Ausdruck 146.8909... berechnet. Zieht man die 11 Primzahlen bis einschließlich 31 ab, die als herausgestrichen gelten, so erhält man 151>146.8909..., was etwas kleiner als die reale Zahl ist (Verhältnis: 0.97279…). Wird mit $A((p_n)^2)$ die Anzahl der Primzahlen bis $(p_n)^2$ bezeichnet dann ergibt sich für wachsende Werte $(p_n)^2$ die nachfolgende **Tabelle 1**. Dabei wächst das Verhältnis mit wachsendem Zahlenwert im Durchschnitt langsam an und wird ab einem bestimmten Wert $p_n>10000$ größer als 1.

$(p_n)^2$	$A((p_n)^2)\approx(p_n)^2/\ln((p_n)^2)$	$(p_n)^2? ((p_i-1)/p_i)$	$G_n=(p_n)^2? ((p_i-1)/p_i)/A((p_n)^2)$	$S_n=1/G_n$
10^3	168 (-11)*	152.85…*	0.9735	1.0271..
10^4	1229 (-25)	1203.17...	0.99848	1.0015..
10^6	78498	80480.	1.0252	0.975..
10^7	664579	696111.	1.0474	0.954..
10^8	5761455	6096386.	1.0581	0.945..
10^9	50847534	$5.4179\ 10^7$	1.0655	0.938..
10^{10}	455052511	$4.8755\ 10^8$	1.0714	0.933..
10^{11}	$4.1107\ 10^9$	$4.4334\ 10^9$	1.0785	0.927..
10^{12}	$3.7550\ 10^{10}$	$4.0639\ 10^{10}$	1.0822	0.924..

Tabelle 1. *Für $(p_n)^2$ gleich 1000 gesetzt, $p_n=31$, ohne 11 Abstrichzahlen 157. Die Klammerwerte entsprechen der Anzahl der Abstrichprimzahlen.

Es geht im Grenzfall für $n?\ 8$ $A((p_n)^2)=S_n(p_n)^2? ((p_i-1)/p_i)$ (22) der Wert S_n gegen einen festen Grenzwert. Die Konvergenz ist extrem langsam und scheint in der Nähe von unterhalb von 0.9 zu liegen, d.h. bei etwa mehr als 10 % Abweichung. Als Plausibilitätsbetrachtung seien die nachfolgenden Erläuterungen gestattet. Das Ergebnis ist daraus zu erklären, dass die relativen Primzahlen nicht annähernd gleichmäßig für Intervalle der Länge $(p_n)^2$ verteilt sind. Obwohl die ersten n Primzahlen nicht berücksichtigt werden, sie zählen quasi als herausgestrichen, beginnt das Herausstreichen mit einem anscheinend „worst case“ – dem schlechtesten Fall, da bei null alle Abstriche starten. Die ersten n Primzahlen bis p_n sind gegenüber jenen des Intervalls p_n bis $(p_n)^2$ für große p_n vernachlässigbar, was unmittelbar aus der Zunahme der Anzahl der Primzahlen im Grenzfall folgt. Der erste Zusammenfall von Abstrichen, die in der Abstrichreihe positives Vorzeichen haben erfolgt an spätest möglicher Stelle. Das Gleiche aber gilt auch für die dreifachen Zusammenfälle, die ein negatives Vorzeichen haben, usw. für alle Mehrfachzusammenfälle mit positivem Vorzeichen für geradzahlige Anzahl von Faktoren und negativem Vorzeichen für ungeradzahlige Anzahl von Faktoren. Es ist $(p_n)^2$<<? p_i. Die willkürliche Festlegung auf eine Intervalllänge von $(p_n)^2$ resultierte aus der Tatsache, dass alle nicht herausgestrichenen Zahlen kleiner als $(p_n)^2$ Primzahlen sein müssen. Was ist aber der Grund, obwohl anfänglich die Anzahl der Primzahlen unterschätzt wird, dass diese für große n zunehmend überschätzt wird, aber auf ein festes Verhältnis zu konvergieren? Es werden vollkommen alle Einfach- und Doppelprodukte berücksichtigt. Bei den negativen Dreifachprodukten sind die höheren Produkte bereits größer als $(p_n)^2$. Das steigert sich zunehmend bei den höheren Mehrfachprodukten, deren Gesamtzahl entsprechend der Binomialkoeffizienten steigt. Diese Produkte, die nicht zum Tragen kommen, bestimmen aber (21) im zweiten Produktterm mit, sie gehen in die Rechnung ein, aber fehlen effektiv. Eine Überschätzung durch (21) bedeutet, dass in ihr die Glieder in der Abstrichreihe mit positiven Vorzeichen gegenüber denjenigen mit negativen Vorzeichen bis $(p_n)^2$ zu stark berücksichtigt wurden. Wegen der unterschiedlichen Größe der Faktoren in den Mehrfachprodukten könnte zwar die maximale Anzahl der Faktoren bestimmt werden, so dass das Produkt aus diesen Faktoren kleiner als $(p_n)^2$ bleibt, es ist jedoch schwierig, allgemein die restlichen Produkte zu bestimmen und damit eine Abschätzung der Anzahl der effektiven Abstriche und der Abweichung zum mittleren Wert zu versuchen.

10. Abschätzung von F_n

Die Anzahl der Primzahlen A(x) für große Zahlen x wurde durch Gauß mit dem Integrallogarithmus abgeschätzt: Li(x)=?dt/ln(t) mit der oberen Grenze x und unteren Grenze 2. Dieser Ausdruck wurde durch Legendre und Riemann verbessert. Hadamad bewies, dass der Grenzwert für x? 8 von A(x)/Li(x)=1 ist. Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung ist $Li(x)=(x-1)/ln(x^*)=(x-1)/(ln(x)-ln(c))$. $x^*=x/c$ ist ein Wert aus dem Intervall x-1 und c ist eine Konstante. Für x? 8 geht dieser Ausdruck gegen x/ln(x), da ln(x)>>ln(c) wird. Hiermit wird für n? 8

$\lim[(p_n)^2? ((p_i-1)/p_i)=F_n(p_n)^2/\ln((p_n)^2)]$ oder $\lim(F_n)=F=\lim(? ((p_i-1)/p_i)\ln((p_n)^2)$ (23).

Die Berechnung von F_n bis n=100000 ergab einen Wert von F_n=1.12289... Dies bedeutet, dass durch $(p_n)^2? (p_i-1)/p_i$ eine größere Menge an Primzahlen abgeschätzt wird als tatsächlich vorhanden ist. Das scheint flüchtig betrachtet nicht verwunderlich zu sein, denn mit $F_n/\ln((p_n)^2)$ ist die durchschnittliche Dichte der relativen Primzahlen gegeben und die ist größer als jene der absoluten Primzahlen. F_n und G_n sollten für große n aufeinander zu konvergieren. Der Unterschied besteht entsprechend dem Legendreschen Ansatz in A(x)=x/(ln(x)-a(x)) und A(x)=cx/ln(x) oder c=(ln(x)-a(x))/ln(x)<1.
Bis 10^{22} gibt es 2.0146728668931590629 10^{20} Primzahlen. Die Anzahl ist $>10^{22}/\ln(10^{22})=1.9740658\ 10^{20}$. Nach dem Ansatz von Legendre kann die Anzahl der Primzahlen $A(10^{22})=10^{22}/(\ln(10^{22})-a(10^{22}))=10^{22}/(50.656872..-a(10^{22}))$ geschrieben werden mit $a(10^{22})=1.0210202$ für diesen Zahlenbereich. Dieser Wert ist deutlich kleiner als der ursprünglich von Legendre ermittelte Wert von 1.08366 aus einem sehr beschränkten Zahlenbereich. (Die Frage drängt sich hier auf, ist der Grenzwert für a(8)=1?)

Mit ? $((p_i$-1)/$p_i)$˜1.12289…/ln($(p_n)^2$) würde bis $p_n{}^2=10^{22}$ berechnet ein Wert für G_n von 1.100… folgen, allerdings wurde dieser Wert mit dem noch unsicheren Wert für ?((p_i-1)/p_i)ln($(p_n)^2$)˜1.12289… $(p_n)^2$ bis 100000) ermittelt.
Für A($(p_n)^2$)=$(p_n)^2$/(ln($(p_n)^2$)-a($(p_n)^2$)) gesetzt und $S_n(p_n)^2$? ((p_i-1)/p_i)=$S_nF_n(p_n)^2$/ln($(p_n)^2$) folgt aus (22) $S_nF_n=F_n/G_n$=ln($(p_n)^2$/(ln($(p_n)^2$)-a($(p_n)^2$)), F_n ist größer als G_n, das Verhältnis geht aber gegen 1 für große n. Für $(p_n)^2=10^{22}$ ist ln($(p_n)^2$/(ln($(p_n)^2$)-a($(p_n)^2$))=1.0201911, d.h. F_n ist um etwa 2% größer als G_n= F_n/1.0201911=1.100.. Erst bei $(p_n)^2=10^{44}$ ist die Differenz bei 1%.

Der durchschnittliche Abstand der Primzahlen verhält sich wie A(x+?)=A(x)+1=(x+?)/ln(x+?)=x/ln(x)+1, womit der durchschnittliche Abstand für große x sich wie ?=ln(x) vergrößert. Hierauf wird an späterer Stelle noch einmal zurückgegriffen werden.

11. Numerische Abschätzung höherer Abstrichreihen

Die Produkte der Art ? ((p_i-m)/p_i) lassen sich aus dem Produkt ?((p_i-1)/p_i)=$F_n(p_n)$/ln($(p_n)^2$)=1/(ln($(p_n)^2)^{1/F}$) (24) herleiten. $F_n=F(p_n)$ ist eine Funktion von p_n. Es ist (?((p_i-1)/p_i))^2=? ((($p_i)^2$-2p_i+1)/$(p_i)^2$)=? ((p_i-2+1/p_i)/p_i). Für große p_i ist der 3. Term 1/p_i im Zähler vernachlässigbar klein. Die Beiträge für kleinere p_i können in einem zu ermittelnden Faktor berücksichtigt werden.
Es gilt die Identität mit i=2(1)n ? ((p_i-2)/p_i)*? (1+1/(p_i(p_i-1)))=?((p_i-1)/p_i)^2 oder ?((p_i-1)/p_i)^2/? ((p_i-2)/p_i)=? (1+1/(p_i(p_i-2)))=1.5147802… =2/1.3203236316…=2/^2C_n (25).

Es ist das Verhältnis (?((p_i-1)/p_i))^2/2?((p_i-2)/p_i)=(1/2)(4/3)(16/15)(36/35)(100/99)…(p_i-1)^2/((p_i-1)^2-1)… ˜0.7573008…. (26) [wegen ((p_i-1)/p_i))^2/((p_i-2)/p_i)=((p_i-1)^2/(($p_i{}^2$-2p_i+1)-1)=(p_i-1)^2/((p_i-1)^2-1)]. Das Produkt konvergiert, wobei die fünfte Stelle im berechneten Wert noch weiter anwächst. Der Faktor (1/2) resultiert aus der Tatsache, dass für das doppelte Abstrichsystem das Produkt erst bei (3-2) beginnt, aber 1/2 vor das Produkt gezogen werden muss, während es im einfachen System im Produkt berücksichtigt wird.
Es wurde empirisch gefunden, dass die Anzahl der Primzahlzwillinge im Intervall a um die Stelle x nach der Formel C*a/ln(x)^2 (27) berechnet werden kann. Die Konstante hat den Wert C^*=1.3203236316… Das entspricht aber sehr genau dem Kehrwert von obiger Konstanten ^2C_n=1/0.7573…=1.320…=2?((p_i-2)/p_i)/(?((p_i-1)/p_i))^2 (i=2(1)…) und im Grenzfall folgt $\lim_{n\to\infty}(2\prod_{i=2}^{n}(\frac{p_i-2)p_i}{(p_i-1)^2})$ (28). Die vierte Stelle hinter dem Komma ist auf der Grundlage der verwendeten Anzahl von Primzahlen noch unsicher. Diese Formel ist Ausdruck dafür, dass die Primzahlzwillinge aus einem doppelten Abstrich hervorgehen. Mit (S/(ln($(p_n)^2$)))^2/2?((p_i-2)/p_i)˜0.7573008… wird
? ((p_i-2)/p_i)˜(F/(ln($(p_n)^2$))^2/(0.7573008…*2) und mit S=1.12289…(aus lim(F_n)=F=lim(?((p_i-1)/p_i)ln($(p_n)^2$) bis n=100000 berechnet) folgt: (F^2(1/(ln($(p_n)^2$))^2/1.5147802…˜ 0.83684112…/(ln($(p_n)^2$)^2.

? ((p_i-1)/p_i)˜1.12289…/ln($(p_n)^2)^1$ (29.1)
1/2*?((p_i-2)/p_i)˜ 0.832484…/(ln($p_n)^2)^2$ (29.2)
1/2*1/3*? ((p_i-3)/p_i)˜ 0.674333…/(ln($p_n)^2)^3$ (29.3).

Der Produktindex läuft von i=1; 2; 3 bis n in den jeweiligen Ausdrücken (29..).
Für höhere m-Werte verläuft die Überlegung analog:
(p_i-1)^m/(p_i)^m=($p_i{}^m$-m$p_i{}^{m-1}$+m(m-1)/2$p_i{}^{m-2}$-…)/$p_i{}^m$=(p_i–m+(m(m-1)/2)/p_i-+…)/p_i. Die Produkte ^mF_n? (1/p_j)=?(1/p_j)? (p_i-m)/p_i)(ln($(p_n)^2)^m$ (30) für j=1(1)h und i=(h+1)(1)n konvergieren gegen feste Grenzwerte, wobei $p_h=m<p_{h+1}$ ist.

m	**^mF_n**	**? $(1/p_j)$**
1	1.12289…	1
2	1.6646…	1/2
3	4.046…	(1/2)(1/3)
4	6.598…	(1/2)(1/3)
5	18.08…	(1/2)(1/3)(1/5)
6	34.66…	(1/2)(1/3)(1/5)
7	121.45…	(1/2)(1/3)(1/5)(1/7)
8	375.3…	(1/2)(1/3)(1/5)(1/7)
9	953.4…	(1/2)(1/3)(1/5)(1/7)
10	1629….	(1/2)(1/3)(1/5)(1/7)

Tabelle 2. Die Tabelle listet die Ergebnisse bis n=100000 auf, d.h. die Grenzwerte werden sich noch leicht (um wenige %) ändern.

12. Primzahlen in arithmetischen Folgen

Dirichlet bewies, dass es in jeder arithmetischen Folge, bei der Anfangsglied und Differenz zueinander prim sind, d.h. keinen gemeinsamen Teiler haben, unendlich viele Primzahlen gibt. Was bedeutet diese Aussage? In unserem dekadischen System sind 10 und 3 nicht prim. Somit gibt es unendlich viele Primzahlen der Form n10+3, wie z.B. 1*10+3=13, 2*10+3=23, 4*10+3=43,… 10 und 5 aber sind zueinander prim und deshalb gibt es außer der 5 selbst keine Primzahlen der Form n10+5.
Eine besondere Gruppe von Zahlensystemen bilden die Systeme der Primzahlen, denn in np_i+r erfüllen alle Werte für $p_i>r?0$ diese Bedingung. Die Abstrichreihe hat die analoge Form wie (2) mit der Einschränkung, dass p_i nicht im Produkt enthalten ist. Sie beschreibt wieder die im ? p_j j?i Intervall durchschnittliche Dichte der relativen Primzahlen. Für beliebige Zahlensysteme muss (2) entsprechend modifiziert werden. Die höchste Primzahldichte gibt es für arithmetische Folgen in Systemen der Art ? p_i. Im System 2*3*5=30 gibt es nun Primzahlen in den Folgen n30+1; +7; +11; +13; +17; +19; +23; +29 ((3-1)*(5-1)=8 Stück), d.h. die konstant bleibende Menge der Primzahl verteilt sich auf nur wenige Werte r, während für Systeme der Primzahlen dieses Verhältnis am ungünstigsten wird.
Die **Tabelle 3** listet die Menge der Primzahlen auf, die auf 1, 3, 7 oder 9 enden, für die ersten 100000 Stück in Abständen von 10000.

$A(p_n)$	Endziffer: 1	3	7	9
10000	2485	2515	2497	2501
20000	4967	5017	5010	5004
30000	7453	7511	7501	7533
40000	9951	10023	10009	10015
50000	12453	12521	12530	12494
60000	14989	15020	15022	15017
70000	17465	17519	17484	17525
80000	19949	20018	19999	20032
90000	22436	22515	22517	22530
100000	24922	25040	25025	25011

Tabelle 3: Anzahl der Primzahlen mit bestimmter Endziffer im dekadischen Zahlensystem.

Die relativen Abweichungen voneinander werden zunehmend geringer und liegen maximal bis 100000 bei 0.473 %.
Obwohl die Häufigkeiten erwartungsgemäß schwanken, zeigt die Endziffer 1 systematisch die kleinsten Werte. Der Grund mag darin liegen, dass die möglichen Multiplikationen der Endziffern 3 mal die 1 und die 9, aber nur zweimal die 3 und 7 ergeben. Für die 9 gilt diese Häufigkeitsaussage nicht. Damit gibt es anfänglich mehr Produkte, die auf 1 enden und somit weniger Primzahlen gleicher Endziffer, was, wenn Mehrfachprodukte zum Tragen kommen, für größere Zahlen kompensiert wird. In jedem beliebigen Zahlensystem führt die Multiplikation der Endziffern untereinander, die zu den Primzahlen gehören, immer wieder zu der Menge dieser Endziffern in dem Zahlensystem. Wäre das für die Endziffer z_i nicht so im Zahlensystem s, dann würden sämtliche Zahlen $ns+z_i$ Primzahlen sein. Ist z_i?1, dann ist z_is+z_i keine Primzahl. Ist z_i=1, dann ergeben Produkte untereinander mit der Endziffer 1 wieder Zahlen mit der Endziffer 1. In jedem beliebigen Zahlensystem s gibt es immer Primzahlen der Form ns+1, da 1 und s immer teilerfremd sind.
Für andere Zahlensysteme ist das Ergebnis ähnlich: Im 3-er System folgen für die ersten 100000 Primzahlen für Endziffer 1 49960 und Endziffer 2 50039 Primzahlen. Im 5-er System Endziffer 1 =24966, Endziffer 2 =25016, Endziffer 3 =25007, Endziffer 4 =25010 Primzahlen. Als empirische Tatsache zeigt sich, dass das Verhältnis der Häufigkeiten der Primzahlen arithmetischer Folgen, welche die Dirichletsche Bedingung erfüllt, jedes beliebigen Zahlensystems gegen 1 konvergiert. Das ist insofern nicht überraschend wie die Abstrichreihen für die einzelnen Endziffern für ein beliebiges Zahlensystem gleich sind.

13. Die Reihe $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}$

Die Reihe $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}$ (31) tritt als zweites Glied in (1) auf. Als Eulersche Konstante wird der Ausdruck $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}-\ln(n)=0.57722..$ bezeichnet. Da sich der durchschnittliche Abstand der Primzahlen wie ln(n) anwächst könnte man vermuten, dass $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}$ $-\ln(\ln(p_n))=s(p_n)$ (32) auf einen Grenzwert zu konvergiert. Die Berechnung bis 100000 ergab einen mittleren Wert von s(100000)˜0.261432… Schaut man jedoch genauer mit feinerer Auflösung hin, so erkennt man, dass es für steigende Werte p_n, wachsende Schwankungen um diesen mittleren Wert gibt. Dabei beginnen die Werte mit wachsender Amplitude zu oszillieren. Die Oszillationen sehen zunehmend regulär aus, während diese am Anfang noch einen stochastischen Eindruck vermittelten. Die **Abbildung 3a** zeigt in einem gröberen Maßstab das Verhalten von $s(p_n)$, während **Abbildung 3b** dieses Verhalten bis zu einem p_n von etwa 1.3 10^6 mit hoher Auflösung veranschaulicht. Hierbei wurde jeder 10. Wert zur Darstellung verwendet. Um einen scheinbar mittleren Wert von 0.2616.. schwanken die Werte, allerdings ist nicht abschätzbar, wie groß diese Schwankungen werden können. Die Charakteristika der Schwankungen sind 1. die Amplitude wächst an, 2. die Periode vergrößert sich kontinuierlich, 3. die Maxima werden spitzer und 4. die Minima werden weniger scharf. Können die Amplituden beliebig groß werden? Setzt sich die mehr oder weiniger reguläre Oszillation fort? Gibt es einen mittleren Schwankungswert oder ist der Ausdruck divergent?
Die Schwankungen können nur aus einer nicht einheitlich abnehmenden Primzahldichte resultieren. Nach der Differentialgleichung für die Primzahldichte (12) führt eine überproportionale Primzahldichte an der Stelle $\sqrt{N}$ zu einer verminderten Dichte an der

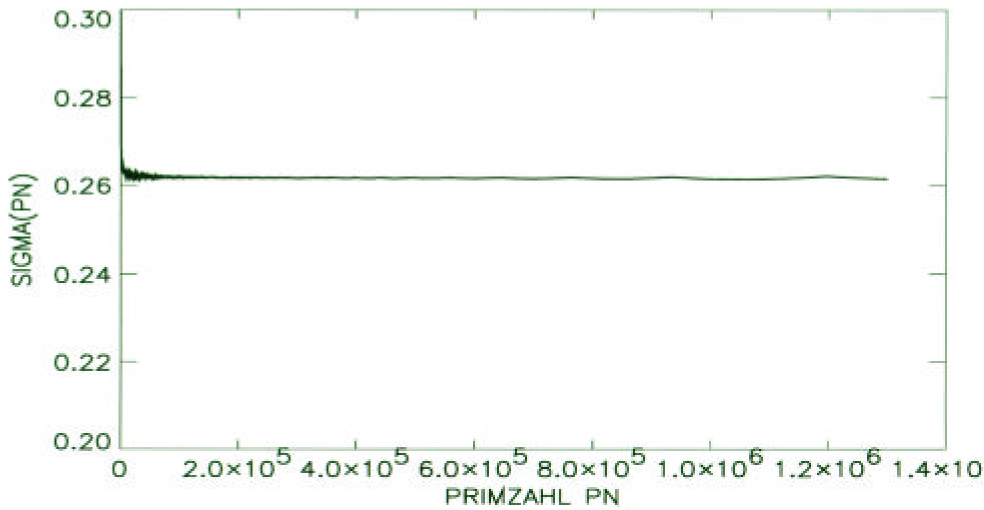

Abbildung 3a Verlauf der Reihe $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i}$ $-\ln(\ln(p_n))$

Stelle N und umgekehrt, was zur Tendenz der Oszillation führt und auch die Vergrößerung der Periode erklären mag.
Für einen durchschnittlich abnehmenden Primzahlabstand von $\ln(p_n)$ folgt die Endlichkeit der Reihe. Es gilt dann $p_{n+1}=p_n+\ln(p_n)$. Das Glied n+1 der Reihe (31) ist dann $G(n+1)=1/(p_n+\ln(p_n))-(\ln(\ln(p_n+\ln(p_n)))-\ln(\ln(p_n)))$ (33).
Der zweite Term in (32) berücksichtigt den relativen Zuwachs von n auf n+1 des zweifachen Logarithmus, der ja nicht der Summation unterliegt.
$\ln(p_n+\ln(p_n))=\ln(p_n)+\ln(1+\ln(p_n)/p_n)\approx \ln(p_n)+\ln(p_n)/p_n$, da $p_n>>\ln(p_n)$ ist und $\ln(1+\ln(p_n)/p_n)$ in eine Reihe entwickelt und nach dem ersten Glied abgebrochen wurde. Es wird somit $\ln(\ln(p_n+\ln(p_n)))\approx \ln(\ln(p_n)+\ln(p_n)/p_n)\approx \ln(\ln(p_n))+1/p_n$, wenn die gleich Reihenentwicklung angewendet wird. Es gilt $1/(p_n+\ln(p_n))\approx 1/(p_n)*(1-\ln(p_n)/(p_n))=1/(p_n)-\ln(p_n)/(p_n)^2$. Somit verhält sich die Reihe für große n wie $-\Sigma\ln(p_i)/(p_i)^2$. Diese Reihe ist aber wegen der Proportionalität zu $1/(p_i)^2$ konvergent. Jedes Glied wird zwar mit $\ln(p_i)$ multipliziert, dafür wird aber gegenüber der konvergenten Reihe $1/i^2$ im Durchschnitt auch nur jedes $\ln(p_i)$-te Glied berücksichtigt, so dass sich beide Effekte kompensieren. Für beschränkte Intervalle kann der Wert der Reihe auch wieder Anwachsen, wenn dort die durchschnittlichen Abstände der Primzahlen kleiner als $\ln(p_n)$ sind. Der Mittelwert von (32) für n zwischen 50000 und 100000 ergibt einen Wert von $\sigma\approx 0.261619\ldots$, was schon sehr nahe dem wahren Wert sein sollte. Die Reihe (31) selbst ist aber divergent.

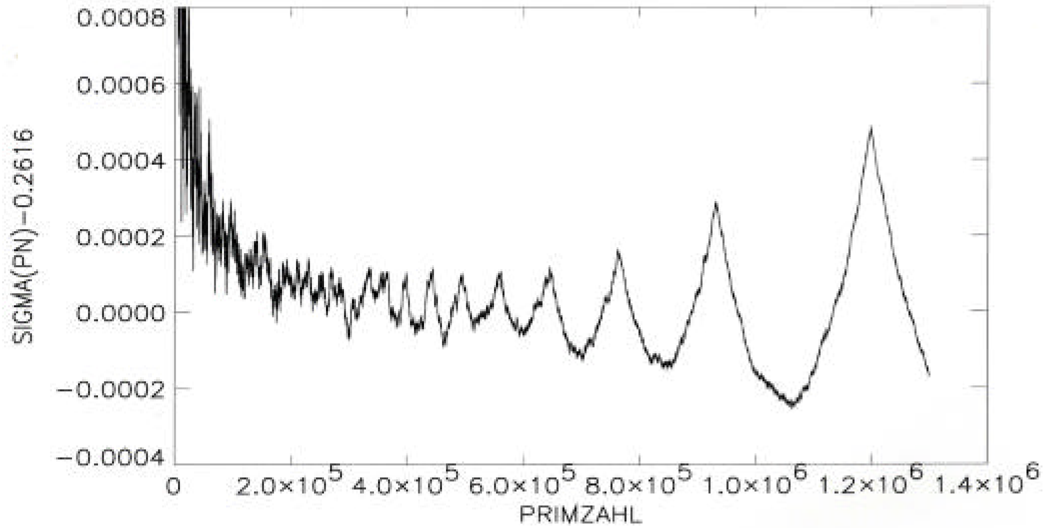

Abbildung 3b Das gleiche wie in Abbildung 3a dargestellt, aber mit höherer Auflösung

14. Menge der natürlichen Zahlen, die nicht durch ein Quadrat teilbar sind

21=3*7 ist nicht durch ein Quadrat teilbar, aber $28=7*2^2$. Um die Menge abzuschätzen, wird nach dem gleichen Verfahren vorgegangen wie in den vorhergehenden Abschnitten, nur dass in diesem Fall nicht die Primzahlen, sondern deren Quadrate die Abstrichzahlen sind. Es sind also die Zahlen 2^2, 3^2, 5^2, usw. Abstrichzahlen, aber 4^2, 6^2, 8^2, 9^2 usw. sind in der Abstrichserie der Teiler der Basis enthalten. Wird in analoger Weise wie (1) und (2) die Abstrichreihe gebildet und in Produktform geschrieben so folgt

$\prod_{i=1}^{n}(1-\frac{1}{p_i^2}) = \prod_{i=1}^{n}(\frac{p_i^2-1}{p_i^2})$ (34). Dies entspricht der durchschnittlichen Dichte der bis p_n relativen Nichtquadratzahlen (sie könnten noch durch $(p_{n+k})^2$ teilbar sein). Bis zur Stelle $N=(p_n)^2$ sind dies die absoluten nicht durch ein Quadrat teilbaren Zahlen. Es ist

$\prod_{i=1}^{n}(1-\frac{1}{i^2}) = \prod_{i=1}^{n}(\frac{i^2-1}{i^2})$ =3/4*8/9*15/16*24/25*35/36*48/49*80/81*99/100*… (35) .

Kürzung der jeweils ersten beiden Brüche von links nach rechts ergibt 2/3, 5/8, 3/5, 7/12, 4/7, 9/16, 5/9, 11/20, 6/11, 13/24,15/28, 8/15,… (36). Diese Folge strebt von oben auf 0.5 zu. Damit liegt der Grenzwert von (34) zwischen 0.5 und 1. Die Berechnung von (35) bis n=100000 Stellen ergibt g_2=0.6080… Die Zahlenfolge (36) enthält einige interessante Beziehungen. Die Glieder der Folge seien mit f_k bezeichnet wobei f_0=3/4 ist. Die Nenner von f_{2k} sind darstellbar als N_{2k}=4(k+1) und die Nenner von f_{2k+1} als N_{2k+1}=2+(2k+1). Der Zähler nimmt für die geraden Folgeglieder jeweils um 2 zu. Z_{2k}=3+2k, für die ungeraden Glieder gilt Z_{2k}+1=2+k. Damit ist f_{2k}=(3+2k)/(4(k+1)) und f_{2k+1}=(2+k)/(2+(2k+1)) (37). Jede ungerade Zahl tritt im Zähler genau zweimal auf, wobei die Differenz der Indices des zweiten Auftretens zum ersten genau dieser Zahl entspricht. Der Wert des Zählers von f_{2k+1} entspricht dem Wert des Nenners von $f_{2(k+1)}$. Beide Ausdrücke gehen für große k-Werte auf ½ zu.

Die zuvor angestellten Betrachtungen lassen sich verallgemeinern. Es wird nach der Menge der Zahlen gefragt, die nicht durch eine beliebige Potenz k von Primzahlen teilbar sind. Die gleichen Überlegungen führen auf $g_k=\prod_{i=1}^{n}(1-\frac{1}{p_i^k}) = \prod_{i=1}^{n}(\frac{p_i^k-1}{p_i^k})$ (38). Mit G_k seien die unendlichen Produkte von $\prod_{i=1}^{n}(1+\frac{1}{p_i^k}) = \prod_{i=1}^{n}(\frac{p_i^k+1}{p_i^k})$ (39) bezeichnet. Es gilt allgemein $g_kG_k=g_{2k}$ und $1>\ldots>g_{k+1}>g_k>\ldots> g_1=0$. Es ist $G_k=g_{2k}/g_k$. Das Produkt g_1G_1 ist im Grenzfall von der Art 0*8, aber endlich. Bis n=100000 berechnet ist es 0.0398821…*15.24389…=0.60795835…Weitere Werte bis n=100000 berechnet sind in der **Tabelle 4** erfasst. Wie im Fall der Primzahlen oder Primzahlzwillinge sind diese Dichtewerte nicht repräsentativ dafür, dass im Intervall $N=(p_n)^2$ auch entsprechend viele Realisierungen vorliegen, nämlich $N^n g_k$ Stück (oder $N(1-{}^n g_k)$ für die Anzahl der Zahlen, die durch die k-te Potenz teilbar sind).

k	$^{100000}g_k$	$^{100000}G_k$
1	(0.0398821) 0	(15.24389) 8
2	0.60795…	1.51978…
3	0.83190…	1.18158…
4	0.92393…	1.07793…
5	0.96438…	1.03590…
6	0.98295…	1.01709…
7	0.99171…	1.00829…
8	0.99593…	1.00406…
9	0.99799…	1.00201…
10	0.99900…	1.00099…

Tabelle 4 Zahlenwerte berechnet bis 100000. 0 und 8 sind die Grenzwerte für k=1.

15. Abstrichsystem für eine nichtarithmetische Folge

Das nachfolgende Problem läuft ebenfalls auf ein doppeltes Abstrichsystem hinaus. Es lassen sich für vielfältige Folgen Abstrichsysteme aufstellen, was zu demonstrieren, das Kernanliegen dieses Beitrags ist. Als Beispiel sei hier die quadratische Folge $f_n=n^2+1$ (40) betrachtet. Ist $n^2+1=kp$, so ist auch $(n+lp)^2+1$ durch p teilbar. Ist $n^2+1=p$ eine Primzahl, k=1, dann können in dieser Folge die Zahlen $n_k=n+kp$ keine Primzahlen mehr sein. Die Zahl n ist dabei kleiner als p, da andererseits l*p abgezogen werden kann bis die Bedingung erfüllt ist, ohne dass die Teilbarkeit durch p verändert wird. Wir bezeichnen den Strahl der natürlichen Zahlen, zu dem die n-Werte gehören, als n-Strahl. Beginnt man mit n=1, so folgt $1^2+1=2$, $2^2+1=5$, $3^2+1=2*5$, $4^2+1=17$, $5^2+1=2*13$, usw. Die Zahlen 2, 5, 13, 17, usw. sind die Abstrichzahlen für den Zahlenstrahl, der die n-Werte enthält. Die Abstrichanfänge sind hiernach gegeben für 2 bei n=1, für 5 bei n=2 und n=3, für 17 bei n=4 (und 13), für 13 bei n=5 (und 8), usf. Außer für die zwei treten alle Abstrichserien doppelt auf. Der Grund ist, dass $(-n)^2=(+n)^2$ ist und demzufolge es die Serien $(kp-n)^2+1$ und $(kp+n)^{.2}+1$ (41) gibt. Liegt bei n^2+1 ein Abstrichanfang, d.h. n^2+1 ist Primzahl, so liegt der zweite Anfang bei $(p-n)^2+1$. Da für die 5 der erste Abstrichanfang bei 2 lag, folgt für den zweiten Anfang 5-2=3. Es können

nur solche Primzahlen Abstrichzahlen sein, welche die Form 4*l+1 haben. (Es wird hier und im folgenden 4*l anstatt 41 geschrieben, um eine Verwechselung von l (el) mit 1 (eins) zu vermeiden, die sich im Druckbild nur wenig in der Größe unterscheiden.) Hieraus kann man sofort schlussfolgern, dass diese spezielle arithmetische Reihe unbegrenzt viele Primzahlen enthalten muss, denn andererseits würde dies bedeuten, dass es eine größte Primzahl dieser Form geben müsste und damit gäbe es eine von 0 verschiedene Dichte von Primzahlen der Form n^2+1, was wiederum im Widerspruch zur Voraussetzung steht, da alle Primzahlen dieser Form auch die Form 4*l+1 besitzen. (Die Überlegung ist ein Spezialfall der durch Dirichlet allgemein bewiesenen Aussage.) Ist n ungerade, dann ist (40) durch 2 teilbar und führt wie im Fall für n=5 zur so genannten Sekundärprimzahl 13.
Die im Abstrichsystem gefundenen Lücken für n=6, 10, 14, 16, … führen sämtlich zu neuen Primzahlen, den Primärprimzahlen: 37, 101, 197, $257=(2^2)^3+1$. Wird die Folge 4*l+1 durchgecheckt für welche l-Werte Primzahlen erzeugt werden, so findet man z.B. 4*7+1=29, und in der Tat ist $17^2+1=2*5*29$ bzw. $12^2+1=5*29$. Die 29 ist somit ebenfalls eine Sekundärprimzahl. 41, 53, 61, 73 sind die folgenden Sekundärprimzahlen. Ihre Abstrichanfänge liegen bei (9, 32), (23, 30), (11, 50), (27, 46), ... Die Produkte sind (2*41, 5*5*41), (2*5*53, 17*53), (2*61, 41*61), (2*5*73, 29*73), … d.h. es sind alles Primzahlen aus der gleichen arithmetischen Folge 4k+1 und der 2. Die Zahl 41 ist Abstrichzahl für 61. Ihr Anfang lag bei 9, der zweite Abstrichanfang liegt demnach bei 9+41=50. Der erste Abstrich einer Abstrichzahl p_i muss dabei kleiner als p_i-1 sein, da die Summe beider Abstrichanfänge von p_i gleich p_i ist.
Die quantitative Fassung läuft wegen des doppelten Abstrichs auf einen Ausdruck

$$\frac{1}{2}\prod_{i=2}^{a_n}\left(\frac{p_{a_i}-2}{p_{a_i}}\right) \quad (42)$$

hinaus, wobei $p_{ai}=4*l+1$ sein muss. Die Zahlen, die zum ersten Mal effektiv im n-Strahl auftreten, müssen kleiner als n sein, denn wären sie größer als n, dann müsste die Zahl n^2+1 durch eine Zahl <n teilbar sein und die größere Zahl hätte dort nach Definition nicht ihren Anfang. (Die Werte n, die zu Primärprimzahlen führen, gelten als nicht herausgestrichen.) Die Anzahl der Primzahlen auf dem n-Strahl bis zu p_{a_n} könnte mit $c_{a_n} p_{a_n} \frac{1}{2}\prod_{i=2}^{a_n}\left(\frac{p_{a_i}-2}{p_{a_i}}\right)$ (43)
abgeschätzt werden, wobei der erste Faktor ein konvergierender Proportionalitätsfaktor ist. Im Unterschied zum Primzahlzwillingsproblem wird (43) lediglich mit p_{a_n} multipliziert. Damit scheint die Anzahl der Realisierungen geringer zu sein als in den vorhergehenden Fällen mit doppeltem Abstrich. Dies ist allerdings nicht verwunderlich, da die Größe der Primärprimzahlen auf dem n-Strahl nicht mit n sondern mit n^2 wächst. Beim Produkt (43) muss beachtet werden, wenn alle Primzahlen der Form 4*l+1 auch Abstrichzahlen wären und ausschließlich sind (**was noch nicht bewiesen ist**), dann sind auf jeden Fall die restlichen Primzahlen der Form 4*l+3=4(l+1)-1 nicht in diesem Produkt enthalten. Nach (29.2) ist das Produkt des doppelten Abstrichsystems unter Berücksichtigung aller Primzahlen $\sim 1/(\ln(p_n))^2$ und somit unter der Voraussetzung der Gleichhäufigkeit der Primzahlen in den arithmetischen Folgen 4*l+1 und 4*l+3, l=1(1)n, ist (43) proportional der Wurzel aus (29.2) also $\sim 1/(\ln(p_n))$.
Es muss die Frage beantwortet werden, ob es mehr als einen doppelten Abstrich, zumindest für einzelne Abstrichzahlen, gibt. Angenommen die Zahlen n und m würden zu einem Abstrichanfang der speziellen Abstrichzahl p gehören, wobei m?p-n gelten soll. Es gilt allgemein $(p-1)^{1/2}<(m, n)<p$ (44), da im Fall einer Primärabstrichzahl kleinstmöglich $(m, n)^2=p-1$ sein kann. Ist $m^2+1=kp$ und $n^2+1=lp$, dann ist die Differenz $m^2-n^2=(k-l)p=(m+n)(m-n)$. Ein Faktor muss durch p teilbar sein. Wegen (44) ist der Absolutbetrag des zweiten Faktors<p und der erste muss gleich p sein. Damit folgt m=p-n im Widerspruch zur Annahme, dass es über den doppelten Abstrich einen weiteren gäbe. Der Anfang der Abstrichserie bei m

entspricht somit dem Anfang der zweiten Abstrichserie im doppelten Abstrich. Hierbei ist m?n, da eine Zahl gerade und die andere ungerade ist.
An der Stelle $N=p_n$ werden für ein Intervall der Länge a $C_n a/\ln(p_n)$ (45) nicht herausgestrichene Zahlen erwartet, die um die Stelle N^2 zu Primärprimzahlen führen. C_n ist eine spezifische mit n? 8 konvergierende Konstante. Das Intervall, in dem die Primärprimzahlen auftreten, hat aber die Länge $(N+a)^2-N^2=2aN+a^2$, wobei der zweite Term vernachlässigbar klein wird für große N. Somit ist die Anzahl der Primzahlen bezogen auf ein Intervall der Länge a gegeben durch $C_n a/(2N\ln(p_n))$˜ $C_n a/(p_n \ln(p_n)^2)$ (46). Der Ausdruck (45) gäbe die Anzahl der Primzahlen in der Folge (40) auf dem n-Strahl an, während (46) ihre Anzahl auf dem Strahl der natürlichen Zahlen wiedergibt. Es spiegelt simpel die Tatsache wider, dass die Anzahl der Zahlen, der (40) gehorchen, linear abnimmt.
Es bleibt der Beweis übrig, warum alle Primzahlen der Form 4k+1 auch Abstrichzahlen sind und warum Primzahlen der Form 4*l+3 keine Abstrichzahlen sein können. Produkte der Form 4k+1 untereinander führen wieder auf Zahlen der gleichen Form. Zahlen der quadratischen Folge (40) haben die Form 4k+1 (n gerade) bzw. 2(4k+1) für n ungerade. Produkte der Form 4k+3 mit geradzahliger Anzahl von Faktoren haben auch die Form 4k+1, z.B. 3*3=9=4*2+1 (k=2). Sie besitzen aber niemals die Form n^2+1.
Es gibt trivialer Weise keine Primärprimzahl, welche die Gleichung $4k+3=n^2+1$ erfüllt, da $2(2k+1)=n^2$ für beliebiges k keine Quadratzahl sein kann. Angenommen, die Abstrichzahlen besäßen die Form 4k+3 und 4k+3 für ein spezielles k wäre die erste Primzahl, welche die Bedingung erfüllte, im Produkt mit einer Zahl 4K+3 den Wert n^2+1 zu ergeben (K?k), dann muss die Ungleichung (4K+3)>n>(4k+3) (46) gelten, weil einer der Faktoren kleiner als n sein muss und 4k+3 die erste Abstrichzahl dieser Form sein soll. In diesem Fall sollte auch $(m+1)(4k+3)>(n-m(4k+3))=n^*>0$ (47) ein Abstrichanfang auf dem n-Strahl sein, denn $(n^*)^2+1=(n-m(4k+3))^2+1=(n^2+1)+(m(4k+3))^2-2nm(4k+3)=(4k+3)(4L+3)$ ist durch (4k+3) teilbar. In diesem Fall muss aber (4L+3)<(4k+3) sein, im Widerspruch zur Annahme, dass (4k+1) die kleinste Primzahl dieser Form sei. Für Abstrichzahlen der Form 4k+1 sind die kleinsten Abstrichzahlen Primärprimzahlen und die Sekundärprimzahlen treten immer im Produkt mit kleineren Primär- oder Sekundärprimzahlen auf. Es sind damit auch Produkte der Form (4k+3)(4*l+3)=(4m+1) wie 3*7=21 keine Abstrichzahlen.
Warum aber sind scheinbar alle Primzahlen der Form 4k+1 auch Abstrichzahlen, im Produkt mit anderen Abstrichzahlen der gleichen Form (k=0(1)8)? Ein Beweis dafür steht noch aus. Es gilt (4k+1)(4*l+1)=4(4k*l+k+l)+1. Für ein beliebiges k muss es immer ein l geben, so dass $(4k*l+k+l)=n^2$ wird. (Z.B. für k=3 mit p=4*3+1=13, mit l=1 folgt 4*3*1+3+1=4*4.)

16. Abschätzungen

Alle Versuche, die Probleme der Mehrfachabstrichsysteme zu beweisen, sind sämtlich gescheitert. Als quasi ein **Grenzverhaltensaxiom** für gegen unendlich gehende p_n kann gelten, dass sich die Anzahl der Realisierungen für höhere Abstrichsysteme so verhält, als wären die Primzahlen an der Stelle N **zufällig statistisch** verteilt entsprechend einer lokalen Dichtefunktion 1/ln(N). Wesentlich für die Bewertung ist jedoch die Abschätzung der Streuung zum mittleren Grenzverhalten.
Kommen wir auf die Betrachtung des Abschnitts 15 zurück. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit beginnen wir den Abstrich mit der kleinsten Abstrichzahl und darauf folgend mit der nächst größeren usw. Effektiv heißt ein Abstrich, wenn dieser nicht durch kleinere Abstriche zuvor herausgestrichen wurde. Jeder effektive Abstrich der beiden Abstrichserien der Primzahl p_i beginnt mit einem Produkt mit einem größeren p_j, wobei dieses p_j logischer Weise dort noch nicht seinen ersten effektiven Abstrich besitzen kann. Die Primärprimzahlen sind nicht herausgestrichen. So ist für $5=2^2+1$ als Primärprimzahl der erste Abstrich nicht bei 2, sondern erst bei 12 mit $12^2+1=5*29$, da $7^2+1=2*5*5$ durch die kleinere Primzahl 2

herausgestrichen wurde. Für die zweite Abstrichserie der 5, die bei 3 eigentlich beginnt, $3^2+1=2*5$, liegt der erste effektive Abstrich bei $8^2+1=5*13$. Der nächste Abstrich bei (8+5) führt zu $13^2+1=2*5*17$, wird also wieder durch eine kleinere Primzahl herausgestrichen. (Es könnte natürlich im n-Strahl auf alle ungeradzahligen Werte verzichtet werden, da diese sämtlich durch zwei teilbar sind.)

Die Erweiterung von p_{an} auf p_{an+1} erweitert auch das Intervall von (42) auf $\prod_{i=1}^{n+1} p_{a_{n+1}}$ (48).

$\prod_{i=2}^{n+1}(p_{a_{n+1}}-2)=(p_{a_{n+1}}-2)\prod_{i=2}^{n}(p_{a_{n+1}}-2)$ (49) ist die Anzahl der nicht herausgestrichenen Zahlen auf dem n-Strahl für das erweiterte Intervall. $2\prod_{i=2}^{n}(p_{a_{n+1}}-2)$ Zahlen werden durch p_{an+1} im Gesamtintervall (48) herausgestrichen oder als Erwartungswert $\frac{2}{p_{a_{n+1}}}\prod_{i=2}^{a_n}(\frac{p_{a_i}-2}{p_{a_i}}))$ Stück für ein Intervall der Länge 1. (43) ist für n? 8 divergent, da er ~p_{an} /ln(p_{an}) ist.
Effektive Abstriche sind nur solche der Art p_i*? p_{aj}<$(p_n)^2$=N mit p_i<p_{aj}. (Beispiel: p_i=7 und p_{aj}=13 und 19 mit 7*13*19=1729<$(p_n)^2=(43)^2$=1849. Die Stelle 1729 ist ein effektiver Abstrich bezüglich der Zahl 7.) Das große Problem besteht darin, dass die Anzahl der herausgestrichenen Zahlen, die noch abschätzbar wären, etwa p_{an}(1-1/ln(p_{an})) ist und somit das Verhältnis dieser Zahlen zu allen Zahlen eines wachsenden Intervalls wie (1-1/ln(p_{an})) gegen 1 geht. (Es gleicht der Aufgabe, das Gewicht des Kapitäns eines Schiffes zu bestimmen, wobei nur eine beschränkte Messgenauigkeit vorliegt. Man wiegt das Schiff mit Kapitän (alle Zahlen) und zieht davon das gewogene Gewicht des Schiffes ab (alle herausgestrichenen Zahlen). Es ist nicht möglich das Gewicht des Kapitäns zu bestimmen, wenn die Messungenauigkeit (Abschätzung) weit über das Gewicht des Kapitäns hinausgeht.)
Die einzige exakte Größe ist gegeben durch (49). Ein mittlerer Erwartungswert bezogen auf eine willkürlich liegende Intervalllänge kann berechnet werden, wenn (42) mit der Intervalllänge (=p_{an}) multipliziert wird. Nun streut die Anzahl der Realisierungen um diesen Erwartungswert und die Frage ist einfach, was gegen die empirischen Befunde spricht. Ist der Abstrich so dicht, dass für n-Werte oberhalb einer bestimmten Schranke keine Lücken mehr erscheinen? Die Antwort auf diese Frage muss ebenfalls offen bleiben.

Nur für das einfache Abstrichsystem lassen sich im Gegensatz zu den höheren Systemen Abschätzungen angeben. Betrachten wir die Anzahl der Primzahlen. Der Gedanke hinter der nachfolgenden Abschätzung ist sehr einfach, gäbe es nach p_n keine Primzahlen mehr, dann wären alle relativen Primzahlen im Widerspruch zur Voraussetzung Primzahlen, da sie nicht herausgestrichen werden können. Also muss es Primzahlen jenseits von p_n geben. Trivialer Weise, je mehr Primzahlen es jenseits von p_n gibt, umso mehr relative Primzahlen werden herausgestrichen, so dass sich quasi ein Gleichgewicht zwischen der Anzahl der Primzahlen, welche die relativen Primzahlen herausstreichen, und dem Rest der nicht herausgestrichenen Zahlen ergeben muss. Wir betrachten die möglichen Primzahlen im Intervall der Länge $\prod_{i=1}^{n} p_i$, d.h., wo nach der widersprüchlichen Voraussetzung alle relativen Primzahlen auch Primzahlen sein müssten. Die anfänglichen n Primzahlen sollen als herausgestrichen gelten. Sie bilden eine verschwindend kleine Menge für wachsende Indices n. Die Erweiterung um eine Abstrichserie der Primzahl p_{n+1} (entsprechend dem Wissen, dass es zumindest eine weitere Primzahl geben muss) führt den effektiven Abstrichen $(p_{n+1})^?$, mit ?=2(1)… Da aber noch eine weitere Abstrichzahl p_{n+2}, p_{n+3} usw. kommen muss, führt dies zu Tabellen wie durch **Tabelle 5** demonstriert wird, wenn die Produkte allesamt kleiner als $\prod_{i=1}^{n} p_i$ sind: (n+i) steht dabei für p_{n+i}, also Primzahlen $>p_{n+1}$, deren Produkt mit p_{n+1} aber $<? p_i$ sein soll. Es werden alle Produkte gebildet, die nicht als Faktor eine Primzahl$<p_{n+1}$ enthalten. Solche Tabellen gibt es für (n+2); (n+3);…; (N). Wobei für ? gilt $(p_{n+1})^{?} < \prod_{i=1}^{n} p_i < (p_{n+1})^{?+1}$. ? ist die größte natürliche Zahl, welche die vorhergehende Bedingung erfüllt. Daraus folgt

(n+1)	$(n+1)^2$	$(n+1)^3$	$(n+1)^4$	…	$(n+1)^{k-1}$	$(n+1)^k$
-	(n+1)(n+2)	$(n+1)(n+2)^2$	$(n+1)(n+2)^3$	…	$(n+1)(n+2)^{k-2}$	$(n+1)(n+2)^{k-1}$
-	-	$(n+1)^2(n+2)$	$(n+1)^2(n+2)^2$	…	$(n+1)^2(n+2)^{k-3}$	$(n+1)^2(n+2)^{k-2}$
-	-	-	$(n+1)^3(n+2)$	…	$(n+1)^3(n+2)^{k-4}$	$(n+1)^3(n+2)^{k-3}$
...	…	…	…	…	…	…
-	-	-	-	…	$(n+1)^{k-2}(n+2)$	$(n+1)^{k-2}(n+2)^2$
-	-	-	-	…	-	$(n+1)^{k-1}(n+2)$

Tabelle 5

$?<(\ln(?p_i)/\ln(p_{n+1}))<?+1$, das Produkt läuft bis n+1. N ergibt sich aus $p_N=p(?p_i)^{1/2})<(?p_i)^{1/2}<p_{N+1}$ als größte Primzahl vor $(?p_i)^{1/2}$ (i läuft bis n). ? wird für jede nachfolgende Tabelle mit wachsendem p_{n+i} entsprechend $\ln(?p_i)/\ln(p_{n+i})$ kleiner.
Es soll an dieser Stelle die umständliche Abschätzung abgebrochen werden, da sie nichts Neues bringt. Der wesentliche Unterschied der höheren Abstrichsysteme zu dem System der Primzahlen besteht darin, dass die unbegrenzte Existenz von z.B. Primzahlzwillingen nicht von der Existenz kleinerer Primzahlzwillinge abhängt.

Ein kleines Nachwort

Die Ausführungen der 16 vorhergehenden Abschnitte stellen den Versuch dar, die zahlreichen ungelösten Primzahlprobleme aus einer bestimmten systematischen Sicht heraus zu beleuchten. Sie mögen als Anregungen für interessierte Primzahlenthusiasten dienen, sich selbst an bestimmte Probleme zu wagen, da die mathematischen Grundvoraussetzungen von jedem Gymnasiasten erbracht werden sollten. Ich gebe zu, dass ich viele Stunden über Jahre verteilt vergeblich versucht habe, zu verstehen, warum die großen Probleme prinzipiell nicht lösbar sind. Dabei schwang immer die Hoffnung mit, doch noch eine zündende Idee zu haben und vielleicht die maximal mögliche Streuung bei den höheren Abstichsystemen in den Griff zu bekommen – eine Hoffnung, die noch immer im Hinterkopf herumspukt. Da ich hauptberuflich einer anderen Tätigkeit nachgehe und nicht einmal Mathematiker bin (man möge mir deshalb Fehler in der formalen Darstellung nachsehen), muss man sich bei jedem neuen Anlauf erst einmal wieder in die Probleme hineinfinden und versuchen zu verstehen, was man vor Jahren gedacht und aufgeschrieben hatte. Bei der Zusammenschrift aus den älteren handschriftlichen Aufzeichnungen mögen einige Fehler hineingeraten sein, wofür ich mich in dem Fall in aller Form entschuldigen möchte.
Ich hatte erst später Zugriff auf Primzahltabellen. Die Berechnungen von den verschiedenen Konstanten, die mittlerweile auch schon 15 Jahre alt sind, könnten mit den gegenwärtigen Tabellen noch erheblich präzisiert werden. Es wäre sicherlich wünschenswert, auch eine englischsprachige Version ins Internet zu stellen, was bislang aus Zeitgründen noch nicht realisiert werden konnte.